

الخاصة الثامنة: المؤثر التفاضلي العكسي والدوال الزائدية  $chx$  و  $shx$  تغير حالتها:

١- المؤثر التفاضلي العكسي يحتوي على قوتين  $D$  الزوجية

$$\frac{1}{\varphi(0^2)} \frac{ch}{sh} ax = \frac{1}{\varphi(a^2)} \frac{ch}{sh} ax \quad , \quad \varphi(a^2) \neq 0$$

الإنبات: لنثبت صحة إحدى العلاقتين البقيتين:

$$\frac{1}{\varphi(0^2)} \cdot shax = \frac{1}{\varphi(a^2)} \cdot chax$$

من أجل ذلك نعلم أن:

$$\varphi(0^2) \cdot shax = \varphi(a^2) \cdot shax$$

لنؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي فنجد أن:

$$\frac{1}{\varphi(0^2)} \cdot \varphi(0^2) \cdot shax = \frac{1}{\varphi(a^2)} \cdot \varphi(a^2) \cdot shax$$

أي أن:

$$shax = \varphi(a^2) \cdot \frac{1}{\varphi(0^2)} \cdot shax$$

نقسم الطرفين على  $\varphi(a^2) \neq 0$

$$\frac{1}{\varphi(a^2)} \cdot shax = \frac{1}{\varphi(0^2)} \cdot shax \quad \varphi(a^2) \neq 0$$

\* العلاقة الثانية يتم إثباتها بشكل مشابه تماماً.

★ أما في الحالة عندما  $\varphi(a^2) = 0$  أو المؤثر التفاضلي العكسي يحتوي على قوتين فردية عندئذ نستطيع عن  $shax$  أو  $chax$  بدلالة الدوال الخسية.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad shax \quad \text{و} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad chax$$

مثال توضيحي: أوجد ناتج  $\frac{1}{D^4+1} shx$  ؟



SUBJECT:

$$\varphi(0) = 0^4 + 1 \Rightarrow \varphi(1) = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sh} x$$

$$5. \frac{1}{D^4 - 3D^2 + 1} \cdot \operatorname{sh} x = \frac{1}{16 - 12 + 1} \cdot \operatorname{sh} 2x = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{sh} 2x$$

إلى ناتج

$$1. \frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \operatorname{ch} x$$

$$\frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \cdot \operatorname{ch} x = \frac{1}{D \cdot D^2 + 2D^2 - 2D + 1} \cdot \operatorname{ch} x$$

$$= \frac{1}{D - 2D + 2 + 1} \cdot \operatorname{ch} x = \frac{1}{-D + 3} \cdot \operatorname{ch} x$$

$$\frac{1}{D - m} \cdot \operatorname{ch} x = \frac{1}{a^2 - m^2} [a \cdot \operatorname{sh} x + m \cdot \operatorname{ch} x]$$

$$= -\frac{1}{D - 3} \cdot \operatorname{ch} x = -\frac{1}{1 - 9} [\operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x] = \frac{1}{8} \operatorname{sh} x + \frac{3}{8} \operatorname{ch} x$$

$$\frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \cdot \operatorname{sh} x = \frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \cdot e^x + \frac{1}{D^3 + 2D^2 - 2D + 1} \cdot e^{-x} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{-1 + 2 + 2 + 1} e^{-x} \right] = \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{8} e^{-x}$$

إلى ناتج

$$= \frac{1}{8} \operatorname{sh} x + \frac{3}{8} \operatorname{ch} x = \frac{1}{8} \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{16} e^x - \frac{1}{16} e^{-x} + \frac{3}{16} e^x + \frac{3}{16} e^{-x} = \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{8} e^{-x}$$



SUBJECT:

المادة التاسعة: المؤثرات التقاطعية المكسبة وكثيرات الحدود.

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث  $p(x)$  كثير حدود من الدرجة  $k$

$$p(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث  $a_k \neq 0$

نفرض أن كثير الحدود  $q(x)$  من الدرجة  $l$  أنه أن

$$q(x) = b_l \cdot x^l + b_{l-1} \cdot x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

عندئذ لإيجاد ناتج:

$$\frac{a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_l \cdot x^l + b_{l-1} \cdot x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

بغير حالتين:

1-  $b_0 \neq 0$  ففي هذه الحالة نقسم البسط على المقام

مثال -1-

$$\frac{1 - 0 + 0^2 - 2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^4}{1 + 0 + 0^3}$$

$\cdot x^4$

$$\begin{array}{r} 1 \\ -1 + 0 + 0^3 \\ \hline 0 - 0 - 0^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 0 - 0^3 \\ + 0 = 0^2 - 0^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 0 - 0^3 \\ + 0 = 0^2 - 0^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 0 - 0^3 \\ + 0^2 - 0^3 + 0^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 0 - 0^3 \\ + 0^2 - 0^3 + 0^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 0 - 0^3 \\ + 0^2 - 0^3 + 0^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 0 - 0^3 \\ + 0^2 - 0^3 + 0^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 0 - 0^3 \\ + 0^2 - 0^3 + 0^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 0 - 0^3 \\ + 0^2 - 0^3 + 0^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - 0 - 0^3 \\ + 0^2 - 0^3 + 0^4 \end{array}$$

المنتج عند  $D^5 = 0$  في المعادلة من الدرجة 4  
تقف عند التقسيم.

$$-2- \frac{1}{1+0^3} \cdot x^2$$



$$\begin{array}{r} 1 + D^3 \overline{1} \\ -1 + D^3 \\ \hline -D^3 \\ + D^3 + D^6 \\ \hline D^6 \end{array}$$

بالا متجانس:  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$\frac{1}{1+D^3} x^2 = (1 - D^3) \cdot x^2 = x^2 - 0$  مثالاً:

أ- ما هي هذه الحالة؟ نعم البسط على المقام ونسخر منه عملية القسمة. إلى أن نحصل على حد  $D$  أكبر من درجة كثير الحدود.

أو نعلم بأن  $|x| < 1$   $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

ونكتفي في حدود المتسلسلة إلى الحد الذي له يا دى أو أقل من درجة كثير الحدود.

$D^l \cdot x^n = 0 \quad l > n$  مثالاً:

ب-  $x=0$  عندما يكون الحد المطلق معدوم في هذه الحالة  $\frac{1}{D^3 + D^5} \cdot x^3 = \frac{1}{D^3} \cdot \frac{1}{(1+D^2)} \cdot x^3$  مثالاً:

نخرج  $D$  عامل مشترك بأصغر من فنصل على  $\frac{1}{D^3} [1 - D^2 + D^4] x^3$  مثالاً:  $\frac{1}{D^3} [1 - D^2 + D^4] x^3$   $(b_0 + b_1 D + \dots + b_k D^{k-1})$

نوجد  $P(x)$   $\frac{1}{b_0 + b_1 D + \dots + b_k D^{k-1}} P(x)$



SUBJECT:

ومن ثم نوجه ناتج تأثير  $\frac{1}{D}$  على الناتج الذي حصلنا عليه من الخطوة السابقة  
أي نحصل مرة أخرى

1-  $\frac{1}{D^2-30+1} (x^3+2x)$  مثالاً أوجد ناتج

$$= \frac{1}{1+30+80^2+210^3} (x^3+2x)$$

$$\begin{array}{r} 1-30+0^2 \overline{) 1} \\ -1+30-0^2 \\ \hline 0 \quad 30-0^2 \\ -30+90^2-30^3 \\ \hline 0 \quad 80^2-30^3 \\ -80^2+240^3-80^4 \\ \hline 0 \quad 210^3-80^4 \\ -210^3+630^4-210^5 \\ \hline 550^4-210^5 \end{array}$$

$$= (1+30+80^2+210^3)(x^3+2x)$$

$$= (1+30+80^2+210^3)x^3 + 2x(1+30+80^2+210^3)$$

$$= x^3 + 90^2 + 48x + 126 + 2(x + 3)$$

$$= x^3 + 9x^2 + 50x + 132$$

2- باستخدام متلاد القوى:

$$\frac{1}{1-30+0^2} \cdot \frac{x^3+2x}{x^3+2x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(30-0^2)} \cdot x^3+2x = (1+(30-0^2)+(30-0^2)^2+(30-0^2)^3) \cdot (x^3+2x)$$

$$= x^3+2x + 30(x^3+2x) - 0^2(x^3+2x) + 90^2(x^3+2x) - 60^3(x^3+2x) + 0^4(x^3+2x) + 270^3(x^3+2x)$$

$$(30-0^2)^3 = (30)^2 - 3(30) \cdot 0^2 + 3(30) \cdot 0^4 - 0^6$$

$$= 0$$



SUBJECT:

$$= X^3 + 2X + 3(3X^2 + 2) - (6X + 9(6X) - 6(6) + 27(6))$$

$$= X^3 + 2X + 9X^2 + 6 - 6X + 54X - 36 + 162$$

$$= X^3 + 9X^2 + 50X + 132$$

-

$$\frac{1}{D^4 + 30D^3} \cdot X^4$$

أو بدلالة

$$= \frac{1}{D^3} \cdot \frac{1}{3+D} \cdot \frac{1}{3+D} \cdot X^4 = \frac{1}{30^3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}D} \cdot X^4$$

$$= \text{وبالاعتداد على اللامتناهية} \quad \frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - D^3 + D^4 - \dots$$

$$\frac{1}{30^3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}D} \cdot X^4 = \frac{1}{30^3} \left[ 1 - \frac{1}{3}D + \frac{1}{9}D^2 - \frac{1}{27}D^3 + \frac{1}{81}D^4 \right] X^4$$

$$= \frac{1}{30^3} \left[ X^4 - \frac{4}{3}X^3 + \frac{12}{9}X^2 - \frac{24}{27}X + \frac{24}{81} \right]$$

$$\rightarrow = \frac{1}{30^2} \left[ \frac{X^5}{5} - \frac{1}{3}X^4 + \frac{4}{9}X^3 - \frac{12}{27}X^2 + \frac{24}{81}X \right]$$

$$\rightarrow = \frac{1}{30} \left[ \frac{X^6}{30} - \frac{X^5}{15} + \frac{4}{9}X^4 - \frac{4}{27}X^3 + \frac{12}{81}X^2 \right]$$

$$\rightarrow = \frac{1}{3} \left[ \frac{X^7}{210} - \frac{X^6}{90} + \frac{1}{45}X^5 - \frac{4}{27}X^4 + \frac{4}{81}X^3 \right]$$

الخاصة العاشرة: المؤثر القاطن المكسور وتأثيره على جداء دالتين احدهما صيغة الدالة  $X$

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot X \cdot u(x) = X \cdot \frac{1}{\varphi(D)} \cdot u(x) = - \frac{\varphi'(D)}{\varphi^2(D)} \cdot u(x)$$

الاثبات: نعلم أن  $\varphi(D) \cdot X \cdot u = X \cdot \varphi(D) \cdot u + \varphi'(D) \cdot u$



SUBJECT:

$$u = \frac{1}{\varphi(0)} \cdot \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(0) \cdot u$$

بنفرض أن:

$$u(0) \cdot x \cdot u = x \cdot \varphi + \varphi'(0) \cdot u$$

أي أن

$$x \cdot \varphi = \varphi(0) \cdot x \cdot u - \varphi'(0) \cdot u$$

نؤثر على الطرفين بالمؤثر القاطن اليك

$$\frac{1}{\varphi(0)} \cdot x \cdot \varphi = x \cdot u - \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} \cdot u$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varphi(0)} \cdot x \cdot \varphi = x \cdot \frac{1}{\varphi(0)} \cdot \varphi - \frac{\varphi'(0)}{\varphi^2(0)} \cdot \varphi$$

مثالاً: أوجد ناتج مايلي بطريقتين مختلفتين:

$$\frac{1}{D^2 - 2D + 2} \cdot x e^x$$

اعتماداً على الخاصية المباشرة والاعتمادية:

$$\frac{1}{\varphi(0)} \cdot x \cdot \varphi(x) = x \cdot \frac{1}{\varphi(0)} \cdot \varphi(x) - \frac{\varphi'(0)}{\varphi^2(0)} \cdot \varphi(x)$$

$$D = m = 1$$

$$\frac{1}{D^2 - 2D + 2} \cdot x \cdot e^x = x \cdot \frac{1}{D^2 - 2D + 2} \cdot e^x - \frac{2D - 2}{(D^2 - 2D + 2)^2} \cdot e^x$$

$$= x \cdot \frac{1}{1 - 2 + 2} \cdot e^x - \frac{2D - 2}{(1 - 2 + 2)^2} \cdot e^x$$

$$= x e^x - \frac{(2D - 2)}{1} \cdot e^x = x e^x - 2e^x$$

اعتماداً على خاصية الزمرة الثانية:

$$\frac{1}{D^2 - 2D + 2} x e^x = e^x \cdot \frac{1}{(D+1)^2 - 2(D+1) + 2} x \cdot e^x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D^2 + 2D + 1 - 2D - 2 + 2} \cdot x = e^x \cdot \frac{1}{1 + D^2} \cdot x$$



$$= e^x [1 - 0^2] x = e^x (x - 0) = x e^x$$

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة  $n$  المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

الشكل العام لهذا النوع من المعادلات هو:

$$y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (1)$$

وباستخدام المؤثر التفاضلي  $D$  تكتب المعادلة على النحو:

$$(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) y = 0$$

أو اختصاراً على الشكل:

$$\varphi(D) \cdot y = 0$$

$$\varphi(D) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot D^j$$

حيث  $a_n = 1$

وحيث  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  أعداد حقيقية.

$$\varphi(D) \cdot e^{mx} = \varphi(M) \cdot e^{mx}$$

نظاماً عاماً

أي أن الدالة  $e^{mx}$  تكون حلاً للمعادلة  $\varphi(D) y = 0$  إذا وفقط إذا كان  $\varphi(M) e^{mx} = 0$ .

ومن الملاحظة الأخيرة نستنتج أن  $\varphi(M) = 0$  وهذه المعادلة تدعى للمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (1).

نحلاً للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$M^2 - 3M + 2 = 0$$

المعادلة المميزة لها هي

كما أن المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية

$$y''' - 6y'' + 2y' - 1 = 0$$

$$M^3 - 6M^2 + 2M - 1 = 0$$

هي

أ- جميع جذور المعادلة التفاضلية حقيقية ومختلفة مثلثياً؛ ولنتناقص

الحالات المختلفة لجذور المعادلة المميزة:



SUBJECT:

أولاً: الحدود الحقيقية ومختلفة متساوية متساوية تكون الدوال:

$$y_1 = e^{m_1 x} \quad y_2 = e^{m_2 x} \quad y_n = e^{m_n x}$$

قاعدة حلول المعادلات التفاضلية الخطية من هذه الدوال تحقق المعادلة التفاضلية

ثانياً: عند الدوال يساوي رتبة المعادلة التفاضلية

ثالثاً: هذه الدوال مستقلة خطياً عند

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} & \dots & e^{m_n x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} & \dots & m_n e^{m_n x} \\ m_1^2 e^{m_1 x} & m_2^2 e^{m_2 x} & \dots & m_n^2 e^{m_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1^{n-1} e^{m_1 x} & m_2^{n-1} e^{m_2 x} & \dots & m_n^{n-1} e^{m_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1^2 & m_2^2 & \dots & m_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1^{n-1} & m_2^{n-1} & \dots & m_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

والحدود الموجودة هي عبارة عن محدد (ثابت زيركس)

$$= e^{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)x} (m_1 - m_2)(m_1 - m_3) \dots (m_1 - m_n)(m_2 - m_3) \dots (m_2 - m_n) \dots (m_{n-1} - m_n)$$

وبما أن الحدود مختلفة متساوية متساوية أن  $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$  أي أن الدوال مستقلة خطياً عند جميع قيم  $x$  ما عدا الصفر

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة III يكون من الشكل:

$$y_h = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$



SUBJECT: \_\_\_\_\_

٢- أوجد جذور المعادلة المميزة عقدية

لتكن المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (٢) هي

$$M^n + a_{n-1}M^{n-1} + \dots + a_1M + a_0 = 0$$

إذا كان  $M_1$  جذر للمعادلة المميزة ~~هذه~~ عقدية أي من الشكل  $M_1 = \alpha + i\beta$  عندئذ يكون المرافق  $M_2 = \alpha - i\beta$  أيضاً جذر للمعادلة المميزة أي يكون  $M_2 = \alpha - i\beta$  هو جذر أيضاً للمعادلة المميزة.

$$\begin{aligned} A_1 e^{M_1 x} + A_2 e^{M_2 x} &= A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \\ &= A_1 e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} + A_2 e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = A_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + A_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{aligned}$$

$$= e^{\alpha x} [A_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + A_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)]$$

$$= e^{\alpha x} [A_1 + A_2) \cos \beta x + i(A_1 - A_2) \sin \beta x]$$

أي أن الحل العام للمعادلة في هذه الحالة يكون من الشكل:

$$y_h = e^{\alpha x} (A_1 \cos \beta x) + e^{\alpha x} (A_2 \sin \beta x) + A_3 e^{m_3 x} + \dots + A_n e^{m_n x}$$